

УДК 004

DOI 10.18413/2518-1092-2016-1-2-16-20

**Маторин С.И.
Егоров И.А.
Жихарев А.Г.
Раков В.И.**

**ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГРАММНОГО КОМПЛЕКСА «UFOMODELER»
ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ
НЕКОТОРЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ**

- 1) профессор кафедры информационных систем, доктор технических наук, профессор. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: matorin@bsu.edu.ru*
- 2) магистрант. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: 888615@bsu.edu.ru*
- 3) старший преподаватель кафедры информационных систем, кандидат технических наук. Белгородский государственный национальный исследовательский университет, ул. Победы д.85, г. Белгород, 308015, Россия. *e-mail: zhikharev@bsu.edu.ru*
- 4) профессор кафедры Информационные системы, доктор технических наук, профессор Орловский государственный университет им. И.С. Тургенева, ул. Комсомольская, 95, г. Орёл, 302026, Россия. *e-mail: rakov2010i@mail.com*

Аннотация

В работе рассматривается процесс итеративного вычисления дифференциального уравнения первого порядка в виде последовательных этапов с применением программного комплекса «UFOModeler».

Ключевые слова: системно-объектный подход «Узел-Функция-Объект»; визуальное графоаналитическое моделирование; обыкновенные дифференциальные уравнения; численные методы.

UDC 004

**Matorin S.I.
Egorov I.A.
Zhikharev A.G.
Rakov V.I.**

**APPLICATION OF THE «UFOMODELER» SOFTWARE SYSTEM
IN THE SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
OF FIRST ORDER WITH SOME NUMERICAL METHODS**

- 1) Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information Systems, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia *e-mail: matorin@bsu.edu.ru*
- 2) Master's Degree Student, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia *e-mail: 888615@bsu.edu.ru*
- 3) Senior Lecturer, Candidate of Technical Sciences, Department of Information Systems, Belgorod State National Research University, 85 Pobedy St., Belgorod, 308015, Russia *e-mail: zhikharev@bsu.edu.ru*
- 4) Doctor of Technical Sciences, Professor, Department of Information Systems, Orel State University named after Ivan Turgenev, 95 Komsomolskaya St., Orel, 302026, Russia *e-mail: rakov2010i@mail.com*

Abstract

The study examined the process of iterative calculations of differential equation of first order in the form of successive stages on the basis of the UFOModeler software.

Keywords: system-object approach «Unit-Function-Object»; visual graphic-analytical modeling; ordinary differential equations; numerical methods.

Введение

Задачи имитационного моделирования функционирующих систем очень часто сводятся к необходимости формального описания

протекающего процесса, модель которого необходимо построить. В свою очередь множество процессов можно описать определенным дифференциальным уравнением.

Исходя из вышесказанного, для моделирования численных алгоритмов решения дифференциальных уравнений будет выбран системный подход «Узел-Функция-Объект» как единый универсальный подход к исследованию явлений любой природы [1, с. 2]. Данный подход, в том числе, призван обеспечить возможность универсального представления всех видов знаний.

Упомянутый подход является относительно новым и может быть использован для моделирования численных алгоритмов решения дифференциальных уравнений. До настоящего времени данный подход использовался как средство моделирования бизнес-процессов, организационных знаний, а также слабо формализуемых предметных областей. Использование предлагаемого подхода для представления знаний с целью моделирования процесса решения дифференциальных уравнений обусловлено следующими соображениями.

Предметная область, в рамках которой осуществляется вычислительный процесс, сама представляет собой сложную систему. Следовательно, знания об этой предметной области также должны представлять собой систему. Анализ, рассмотренных в литературе по вычислительной математике и численным методам, видов представления дифференциальных уравнений показал, что все виды дифференциальных уравнений могут быть сведены к трем базовым видам: данным о зависимых и независимых параметрах функций (на уровне входов-выходов), процедурным данным (о динамике ее функционирования) и декларативным данным о субстанции системы (об объекте, выполняющем функцию). Представленные соображения и обуславливают использование УФО-подхода для решения задач данного исследования.

Основная часть

На текущем этапе исследования целью являлось моделирование процесса решения обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием численных методов анализа в терминах формализованного графоаналитического подхода «Узел-Функция-Объект».

Для достижения цели необходимо выполнить следующие задачи:

- адаптировать УФО-подход к задаче представления математических данных с целью моделирования процесса решения обыкновенных

дифференциальных уравнений;

- разработать диаграммы, отражающие процесс решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в терминах «Узел-Функция-Объект»;

- представить результаты вычислений;

- построить графики функций с помощью программы UFOModeler;

- сделать вывод о точности математических вычислений программного обеспечения UFOModeler.

Будем рассматривать процесс итеративного вычисления дифференциального уравнения первого порядка в виде последовательных этапов, каждый из которых обладает результатом. Причем любая связь (поток) вычислительного процесса представляет собой набор качественных и количественных показателей некоторого объекта, который создается или выполняется в рамках текущего вычислительного процесса.

Рассмотрим пример решения обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка с помощью метода Эйлера-Коши:

$$y' = x^2 - 2y \quad (1)$$

Метод Эйлера-Коши является модификацией метода Эйлера и имеет второй порядок точности вычисления.

Контекстная модель такого процесса представлена на рисунке 1.

Исходя из рисунка 1, процесс вычисления дифференциального уравнения (1) можно рассматривать как определение функции y от «независимых параметров», к ним относят: интервал на котором рассматривается функция $[0..1]$, шаг разбиения интервала – 0.1.

При этом зададим начальное условие решения $y(0)=1$ – «зависимый параметр».

Первый узел диаграммы «инкремент шага h » отвечает за проход по всему интервалу вычисления функции с заданным в условии шагом. Данный узел образует связь с узлом «вычисление приращения Δy », в котором выполняется вычисление $f(x_i, y_i)$ и $f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$:

$$f(x_i, y_i) = x_i^2 - 2y_i, \quad (2)$$

$$\tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i), \quad (3)$$

$$f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}) = x_{i+1}^2 - 2\tilde{y}_{i+1}, \quad (4)$$

где $i=0, 1, 2, \dots, n$.

Число n – количество шагов, определяемое как отношение интервала к размеру шагу:

$$n = \frac{x_n - x_0}{h} \quad (5)$$

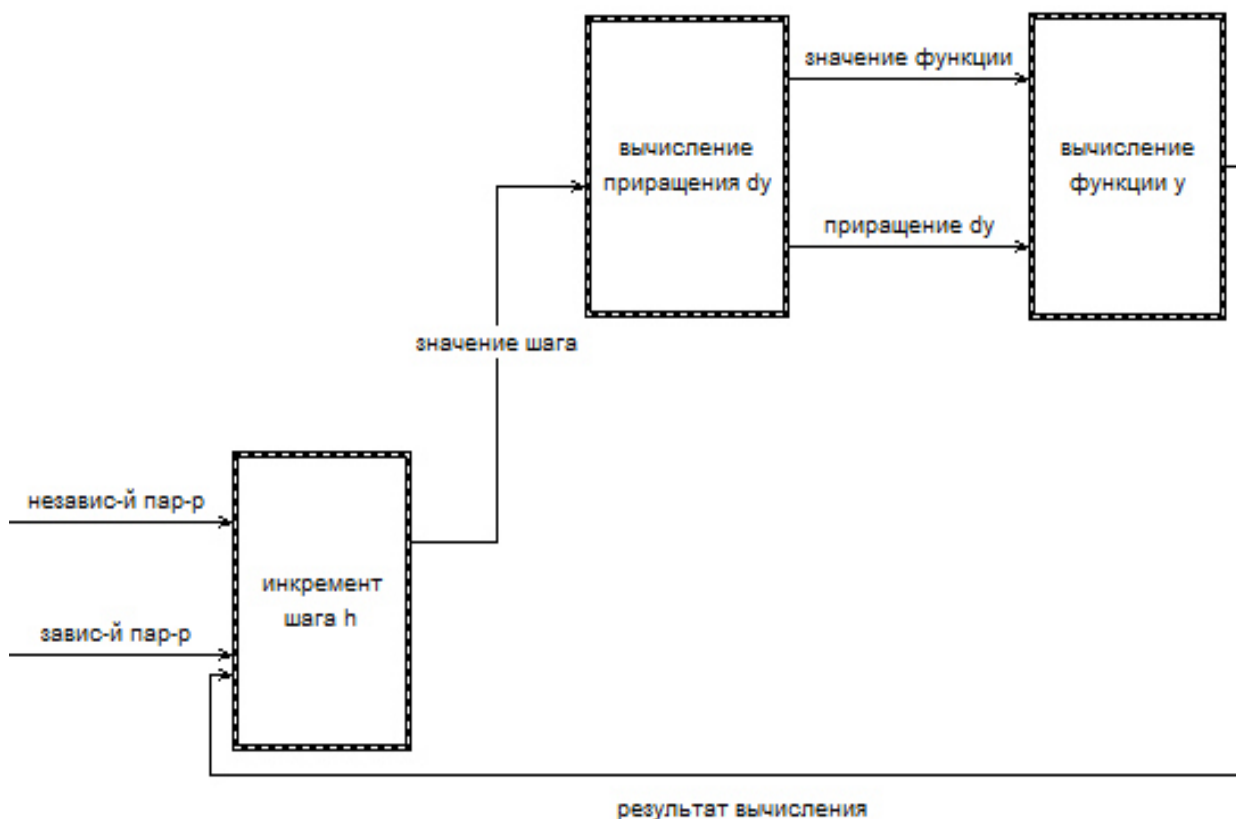


Рис. 1. Контекстная модель процесса вычисления дифференциального уравнения первого порядка
Fig. 1. The contextual process model calculations differential equation

Геометрически это означает, что сначала определяется направление интегральной кривой в исходной точке (x_i, y_i) и во вспомогательной точке $(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})$, а в качестве окончательного направления берется среднее значение этих направлений.

Далее параметры, которые были определены в текущем узле, передаются к следующему связанному узлу «вычисление функции y » в котором определяется значение функции на текущем шаге интервала:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h * (f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1}))}{2}, \quad (6)$$

Таким образом, рассматриваемое решение состоит из трех этапов. Так как алгоритм определения функции является итеративным, то ответ, полученный на данном шаге, возвращается через связь к первому узлу диаграммы для определения результата очередного шага.

Следующие методы вычисления функции имеют аналогичные диаграммы моделей, не требуют иллюстрации и подробного описания, отличаются только формулами вычисления приращения очередного шага.

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (1) с помощью усовершенствованного

метода Эйлера. Улучшение метода заключается в том, что отрезки, построенные между точками функции, должны быть параллельны касательным, которые проведены к графику функции y' не на левых краях, а по центру интервалов разбиения. Суммарная погрешность этого метода есть величина $O(h^2)$.

Приведем формулу усовершенствованного метода Эйлера для узла «вычисление приращения Δy »:

$$f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)) = (x_i + \frac{h}{2})^2 - 2(y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)). \quad (7)$$

Приведем формулу усовершенствованного метода Эйлера для узла диаграммы «вычисление функции y »:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} f(x_i, y_i)) \quad (8)$$

Рассмотрим решение дифференциального уравнения (1) с помощью метода Рунге-Кутты четвертого порядка.

Данный метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части $f(x, y)$ уравнения (1). Суммарная погрешность этого метода есть величина $O(h^4)$.

Приведем формулу усовершенствованного метода Рунге-Кутта для узла «вычисление

приращения Δy »:

$$k_1 = f(x_i, y_i) = x_i^2 - 2y_i. \quad (9)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_1\right) = \left(x_i + \frac{h}{2}\right)^2 - 2\left(y_i + \frac{h}{2}k_1\right). \quad (10)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2}k_2\right) = \left(x_i + \frac{h}{2}\right)^2 - 2\left(y_i + \frac{h}{2}k_2\right). \quad (11)$$

$$k_4 = f(x_i + h, y_i + hk_3) = (x_i + h)^2 - 2(y_i + hk_3). \quad (12)$$

Приведем формулу усовершенствованного метода Рунге-Кутты для узла диаграммы «вычисление функции y »:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (13)$$

Сравним полученные результаты расчетов, проведенных в программе «UFOModeler» с точными значениями функции:

$$y_{i+1} = \frac{3}{4}e^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}. \quad (14)$$

Вычислим погрешность использованных методов по отношению к точному значению y^* . Занесем данные в сводную таблицу.

Таблица

Погрешности вычисления дифференциального уравнения в зависимости от используемого метода

Table

Error of calculation of the differential equation depending on the method used

h шаг	М. Эйлера-Коши	Погреш-ть М. Эйлера-Коши	М. Усов-й Эйлера	Погреш-ть М. Усов-го Эйлера	М. Рунге-Кутта	Погреш-ть М. Рунге-Кутта	Точные значения y^*
0	1	0	1	0	1	0	1
0,1	0,820500	0,001452	0,820250	0,001202	0,819051	0,00000283	0,819048
0,2	0,675210	0,00247	0,674755	0,002015	0,672745	0,00000472	0,672740
0,3	0,559772	0,0031632	0,559149	0,0025401	0,556615	0,00000569	0,556609
0,4	0,470613	0,0036162	0,469852	0,002855	0,467004	0,00000650	0,466997
0,5	0,404803	0,00389283	0,403929	0,00301885	0,400917	0,00000683	0,400910
0,6	0,359938	0,00404232	0,358972	0,00307566	0,355903	0,00000714	0,355896
0,7	0,334049	0,00410142	0,333007	0,00305876	0,329955	0,00000727	0,329948
0,8	0,325521	0,00409853	0,324416	0,00299354	0,321430	0,00000788	0,321422
0,9	0,333027	0,00405283	0,331871	0,00289675	0,328982	0,00000752	0,328974
1	0,355482	0,003981	0,354284	0,00278301	0,351509	0,00000764	0,351501

Исходя из значений, полученных в таблице 1 можно сделать вывод о том, что метод Рунге-Кутта является наиболее близким по отношению к точному значению, погрешность составляет $|\epsilon| < 0,00001$. Метод Эйлера-Коши и усовершенствованный метод Эйлера обладают меньшим классом точности, погрешность данных методов составляет $|\epsilon| < 0,01$.

На основании таблицы построим графики функций. Воспользуемся функцией построения графиков, встроенной в программу «UFOModeler».

На рисунке 2 представлены графики функций, из которых можно сделать вывод о точности приближенных методов решений.

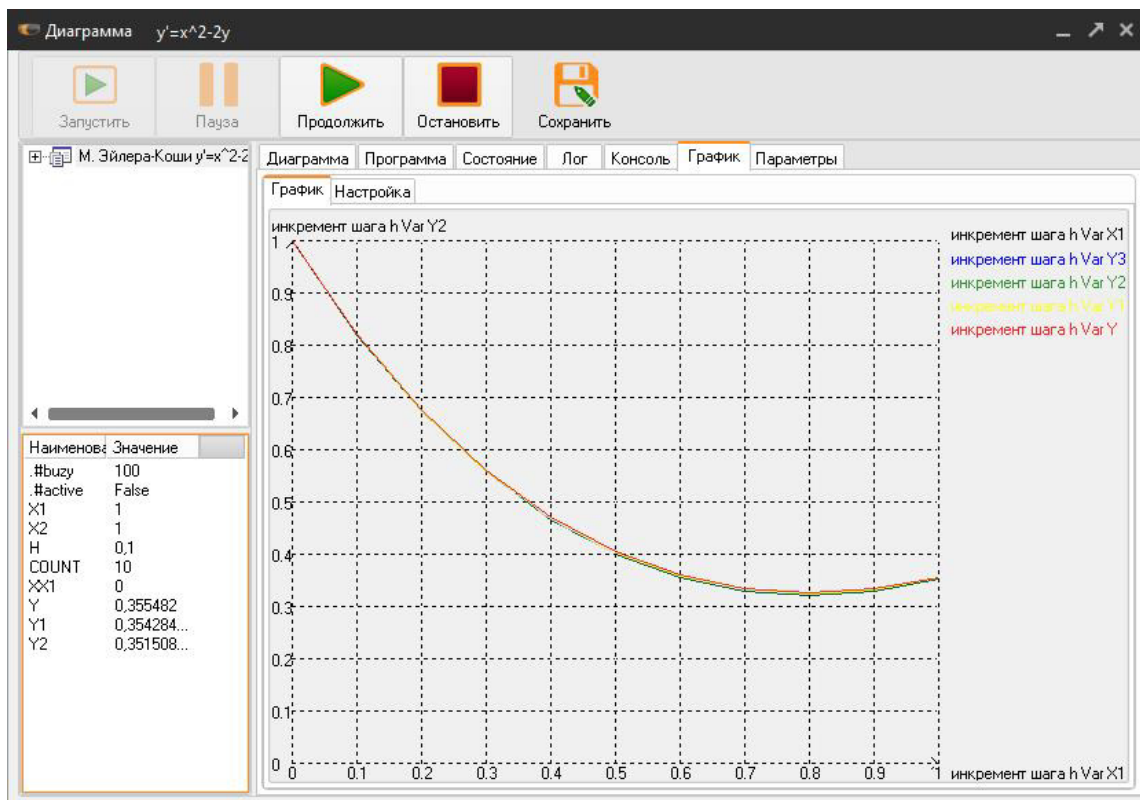


Рис. 2. Различия графиков функций в зависимости от погрешностей

Fig. 2. Differences of graphs of functions depending on the error

Заключение

Таким образом, произведена адаптация УФО-подхода к задаче представления математических данных с целью моделирования процесса решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Разработаны диаграммы, отражающие процесс решения обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в терминах «Узел-Функция-Объект».

Сформирована сводная таблица результатов вычислений.

Построены графики результирующих функций с помощью программного обеспечения «UFOModeler».

Имитационное программное обеспечение UFOModeler способно вести вычисления с высокой точностью, и может быть использовано для моделирования вычислительных процессов.

Список литературы

1. Маторин С.И., Попов А.С., Маторин В.С. Моделирование организационных систем в свете нового подхода «Узел-Функция-Объект» // НТИ. Сер. 2. 2005. № 1. С. 1-8.
2. Минский М. Фреймы для представления знаний. М.: Мир. - 1979. - 152 с.
3. Нильсон Н. Принципы искусственного интеллекта. М.: Радио и связь. - 1990. - 376 с.
4. William A. What's in a link: foundations for semantic networks // In: D.G. Bobrow and A. Collins, eds. Representation and Understanding, Academic Press, New York. -1975. pp. 35-82.

References

1. Matorin S.I., Popov S.A., Matorin V.S. Modeling of Organizational Systems in Terms of the New «Unit-Function-Object» Approach. NTI. 2005. № 1(2). pp. 1-8.
2. Minskiy M. Frames for Presentation of Knowledge. M.: Mir, 1979. 152 p.
3. Nielsen N. Principles of Artificial Intelligence. M.: Radio and connection, 1990. 376 p.
4. William A. What's in a link: foundations for semantic networks. In: D.G. Bobrow and A. Collins, eds. Representation and Understanding, Academic Press, New York. 1975. Pp. 35-82.